T8联考 八校

东北育才学校　福州一中　广东实验中学　湖南师大附中
华师一附中　南京师大附中　石家庄二中　西南大学附中

2022届高三第一次联考

数学试题

命题学校:湖南师大附中　命题人:高三数学备课组　审题人:朱海棠、谢美丽

试卷满分150分　考试用时120分钟

座位号______ 考生号______ 姓名______

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. "$0<\theta<\frac{\pi}{3}$"是"$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知$z=\frac{2i}{1-i}-1+2i$,则复数z在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

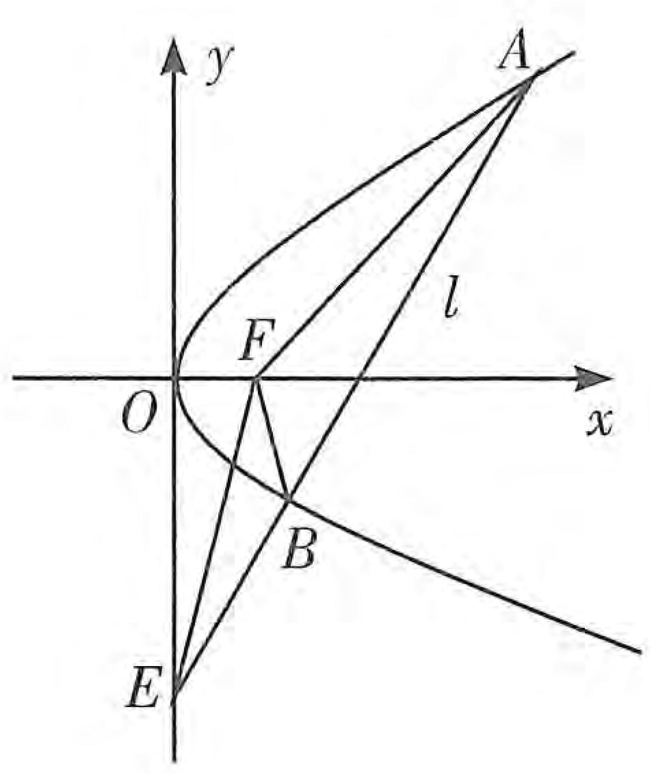
3. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零向量,$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,则下列命题为真命题的是

A. 若$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$　　B. 若$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,则$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$
C. 若$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则$\lambda=\mu=0$　　D. 若$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})>0$

4. 已知函数$y=f(x)$的图象与函数$y=2^x$的图象关于直线$y=x$对称,$g(x)$为奇函数,且当$x>0$时,$g(x)=f(x)-x$,则$g(-8)=$

A. -5　B. -6　C. 5　D. 6

5. 如图,抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F,直线l与C相交于A,B两点,l与y轴相交于E点.已知$|AF|=7$,$|BF|=3$,记$\triangle AEF$的面积为S_1,$\triangle BEF$的面积为S_2,则

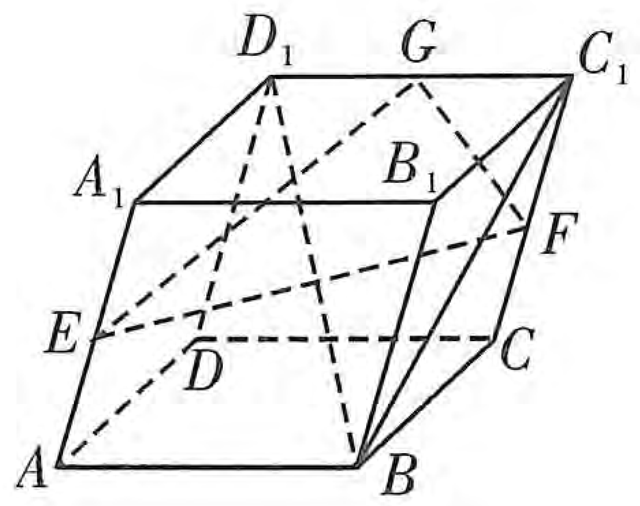


A. $S_1=2S_2$　　B. $2S_1=3S_2$
C. $S_1=3S_2$　　D. $3S_1=4S_2$

6. 已知$\sqrt{3}\tan 20°+\lambda\cos 70°=3$,则$\lambda$的值为

A. $\sqrt{3}$　B. $2\sqrt{3}$　C. $3\sqrt{3}$　D. $4\sqrt{3}$

7. 如图，已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面为平行四边形，E,F,G 分别为棱 AA_1,CC_1,C_1D_1 的中点，则



A. 直线 BC_1 与平面 EFG 平行，直线 BD_1 与平面 EFG 相交

B. 直线 BC_1 与平面 EFG 相交，直线 BD_1 与平面 EFG 平行

C. 直线 BC_1、BD_1 都与平面 EFG 平行

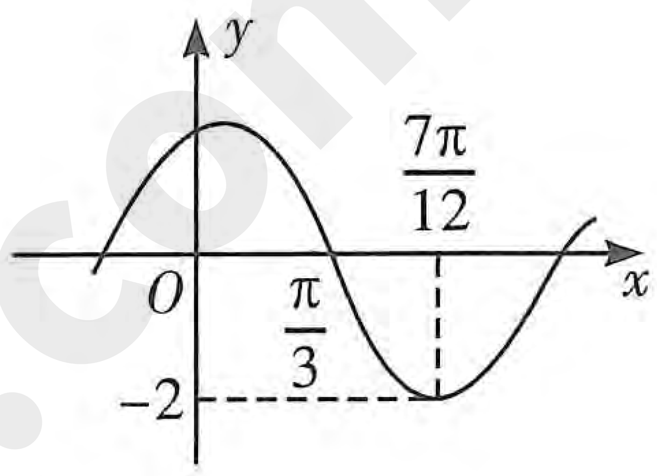
D. 直线 BC_1、BD_1 都与平面 EFG 相交

8. 设 a,b 都为正数，e 为自然对数的底数，若 $ae^{a+1}+b<b\ln b$，则

A. $ab>e$　　B. $b>e^{a+1}$　　C. $ab<e$　　D. $b<e^{a+1}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则



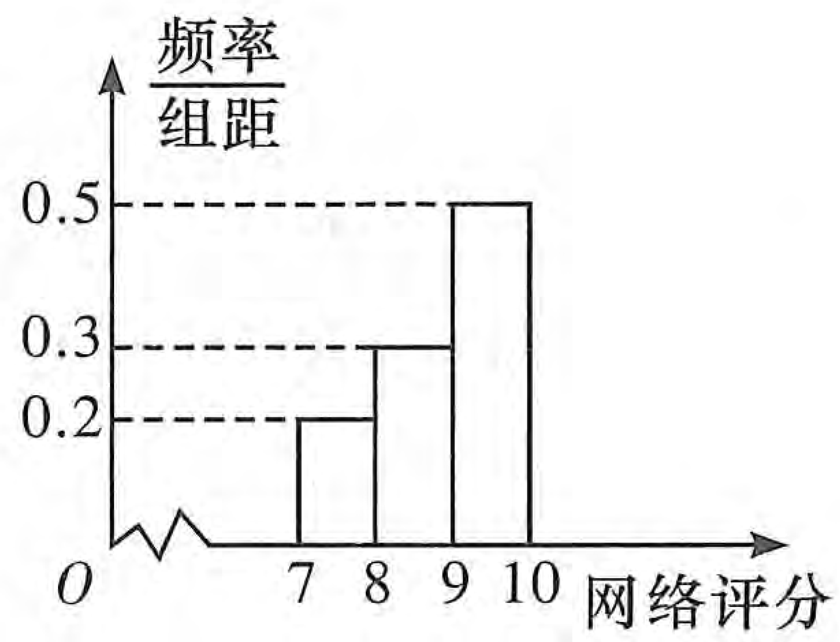
A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

C. $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 内的最小值为 1

D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{2\pi}{3}$ 对称

10. 某中学在学校艺术节举行“三独”比赛（独唱、独奏、独舞），由于疫情防控原因，比赛现场只有 9 名教师评委给每位参赛选手评分，全校 4000 名学生通过在线直播观看并网络评分，比赛评分采取 10 分制. 某选手比赛后，现场 9 名教师原始评分中去掉一个最高分和一个最低分，得到 7 个有效评分如下表. 对学生网络评分按 [7,8)，[8,9)，[9,10] 分成三组，其频率分布直方图如图所示.



教师评委	A	B	C	D	E	F	G
有效评分	9.6	9.1	9.4	8.9	9.2	9.3	9.5

则下列说法正确的是

A. 现场教师评委 7 个有效评分与 9 个原始评分的中位数相同

B. 估计全校有 1200 名学生的网络评分在区间 [8,9) 内

C. 在去掉最高分和最低分之前，9 名教师评委原始评分的极差一定大于 0.7

D. 从学生观众中随机抽取 10 人，用频率估计概率，X 表示评分不小于 9 分的人数，则 $E(X)=5$

11. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在 C 的右支上，且不与 C 的顶点重合，则下列命题中正确的是

A. 若 $a=3,b=2$，则 C 的两条渐近线的方程是 $y=\pm\dfrac{3}{2}x$

B. 若点 P 的坐标为 $(2,4\sqrt{2})$，则 C 的离心率大于 3

C. 若 $PF_1\perp PF_2$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积等于 b^2

D. 若 C 为等轴双曲线，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$

12. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=2\sqrt{3}$，沿对角线 AC 将矩形折成一个大小为 θ 的二面角 $B-AC-D$，若 $\cos\theta=\frac{1}{3}$，则

A. 四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 16π　　B. 点 B 与点 D 之间的距离为 $2\sqrt{3}$

C. 四面体 $ABCD$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. 异面直线 AC 与 BD 所成的角为 $45°$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设函数 $f(x)=e^{x-1}+x^3$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 l，则直线 l 在 y 轴上的截距为________.

14. 已知 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中第 3 项为常数项，则这个展开式中各项系数的绝对值之和为________.（用数字作答）

15. 数列 $\{a_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21，34，…，称为斐波那契数列(Fibonacci sequence)，该数列是由十三世纪意大利数学家莱昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci)以兔子繁殖为例子而引入，故又称为“兔子数列”．在数学上，斐波那契数列可表述为 $a_1=a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$．设该数列的前 n 项和为 S_n，记 $a_{2023}=m$，则 $S_{2021}=$________.（用 m 表示）

16. 在平面直角坐标系中，若正方形的四条边所在的直线分别经过点 $A(1,0)$，$B(2,0)$，$C(4,0)$，$D(8,0)$，则这个正方形的面积可能为________或________.（每条横线上只填写一个可能结果）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$.

(1)设 $g(x)=f(-x)$，求函数 $g(x)$ 的单调递减区间；

(2)设△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，D 为 BC 边的中点，若 $f(A)=\frac{1}{2}$，$a=\sqrt{3}$，求线段 AD 的长的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=3$，$S_3=5a_1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

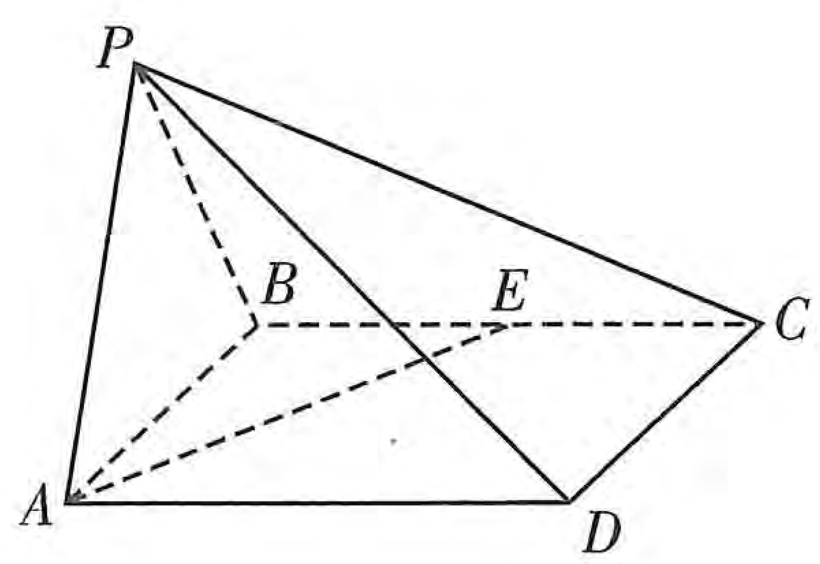
(2)设 $b_n=1+\frac{2}{S_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n．定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，例如 $[0.3]=0$，$[1.5]=1$．当 $[T_1]+[T_2]+\cdots+[T_n]=63$ 时，求 n 的值.

19.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$PB=AB$，E 为 BC 的中点.

(1)若 $\angle PBA=60°$，证明：$AE\perp PD$；

(2)求直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围.



20.(本小题满分 12 分)

设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,圆 $C:(x-2m)^2+(y-4m)^2=1(m\neq0)$,点 F_1,F_2 分别为 E 的左、右焦点,点 C 为圆心,O 为原点,线段 OC 的垂直平分线为 l. 已知 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$,点 F_1,F_2 关于直线 l 的对称点都在圆 C 上.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)设直线 l 与椭圆 E 相交于 A,B 两点,问:是否存在实数 m,使直线 AC 与 BC 的斜率之和为 $\frac{2}{3}$?若存在,求实数 m 的值;若不存在,说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

元旦将至,学校文学社拟举办“品诗词雅韵,看俊采星驰”的古诗词挑战赛. 初赛阶段有个人晋级赛和团体对决赛. 个人晋级赛为“信息连线”题,每位参赛者只有一次挑战机会. 比赛规则为:电脑随机给出错乱排列的五句古诗词和五条相关的诗词背景(如诗词题名、诗词作者等),要求参赛者将它们一一配对,有三对或三对以上配对正确即可晋级. 团体对决赛为“诗词问答”题,为了比赛的广泛性,要求以班级为单位,各班级团队的参赛人数不少于 30 人,且参赛人数为偶数. 为了避免答题先后的干扰,当一个班级团队全体参赛者都答题完毕后,电脑会依次显示各人的答题是否正确,并按比赛规则裁定该班级团队是否挑战成功. 参赛方式有如下两种,各班可自主选择其中之一参赛.

方式一:将班级团队选派的 $2n$ 个人平均分成 n 组,每组 2 人. 电脑随机分配给同一组两个人一道相同试题,两人同时独立答题,若这两人中至少有一人回答正确,则该小组闯关成功. 若这 n 个小组都闯关成功,则该班级团队挑战成功.

方式二:将班级团队选派的 $2n$ 个人平均分成 2 组,每组 n 人. 电脑随机分配给同一组 n 个人一道相同试题,各人同时独立答题,若这 n 个人都回答正确,则该小组闯关成功. 若这 2 个小组至少有一个小组闯关成功,则该班级团队挑战成功.

(1)甲同学参加个人晋级赛,他对电脑给出的五组信息有且只有一组能正确配对,其余四组都只能随机配对,求甲同学能晋级的概率;

(2)在团体对决赛中,假设你班每位参赛同学对给出的试题回答正确的概率均为常数 $p(0<p<1)$,为使本班团队挑战成功的可能性更大,应选择哪种参赛方式?说明你的理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-\sin x+x$,其中 a 为非零常数.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,求 a 的取值范围;

(2)设 $\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,且 $\cos\theta=1+\theta\sin\theta$,证明:当 $\theta^2\sin\theta<a<0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点.

2022 届高三第一次联考

数学参考答案

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	A	B	D	C	C	D	A	B	AC	ABD	BC	ACD

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. A 【解析】由正弦函数的单调性可知,当 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ 时,$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$. 反之,当 $0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,可能有 $\theta=\frac{5\pi}{6}>\frac{\pi}{3}$,所以"$0<\theta<\frac{\pi}{3}$"是"$0<\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$"的充分不必要条件,选 A.

2. B 【解析】因为 $z=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}-1+2i=i-1-1+2i=-2+3i$,则复数 z 在复平面内对应的点 $Z(-2,3)$ 位于第二象限,选 B.

3. D 【解析】对于 A,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,结论不成立,命题为假;对于 B,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,结论不成立,命题为假;对于 C,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时,结论不成立,命题为假;对于 D,若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$,则 $|\boldsymbol{a}|^2>|\boldsymbol{b}|^2$,即 $\boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{b}^2$,则 $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2>0$,所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2>0$,命题为真. 选 D.

4. C 【解析】由已知,函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=2^x$ 互为反函数,则 $f(x)=\log_2 x$. 由题设,当 $x>0$ 时,$g(x)=\log_2 x-x$,则 $g(8)=\log_2 8-8=3-8=-5$. 因为 $g(x)$ 为奇函数,所以 $g(-8)=-g(8)=5$,选 C.

5. C 【解析】抛物线 C 的准线方程为 $x=-1$,分别过点 A,B 作 y 轴的垂线,垂足为 A_1,B_1,则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AE|}{|BE|}=\frac{|AA_1|}{|BB_1|}=\frac{|AF|-1}{|BF|-1}=3$,所以 $S_1=3S_2$,选 C.

6. D 【解析】由已知,$\frac{\sqrt{3}\sin 20°}{\cos 20°}+\lambda\sin 20°=3$,则 $\sqrt{3}\sin 20°+\lambda\sin 20°\cos 20°=3\cos 20°$,从而 $\frac{\lambda}{2}\sin 40°=3\cos 20°-\sqrt{3}\sin 20°=2\sqrt{3}\sin(60°-20°)=2\sqrt{3}\sin 40°$,所以 $\lambda=4\sqrt{3}$,选 D.

7. A 【解析】取 AB 的中点 H,则 $BH\underline{\mathbin{/\!/}}C_1G$,从而四边形 BC_1GH 为平行四边形,所以 $BC_1\mathbin{/\!/}HG$. 易知 $EH\underline{\mathbin{/\!/}}GF$,则四边形 $EGFH$ 为平行四边形,从而 $GH\subset$平面 EFG. 又 $BC_1\not\subset$平面 EFG,所以 $BC_1\mathbin{/\!/}$平面 EFG. 易知 $BF\underline{\mathbin{/\!/}}ED_1$,则四边形 BFD_1E 为平行四边形,从而 BD_1 与 EF 相交,所以直线 BD_1 与平面 EFG 相交,选 A.

8. B 【解析】由已知,$ae^{a+1}<b(\ln b-1)=b\ln\frac{b}{e}$,则 $e^a\ln e^a<\frac{b}{e}\ln\frac{b}{e}$. 设 $f(x)=x\ln x$,则 $f(e^a)<f\left(\frac{b}{e}\right)$. 因为 $a>0$,则 $e^a>1$. 又 $b(\ln b-1)>0$,$b>0$,则 $\ln b>1$,即 $b>e$,从而 $\frac{b}{e}>1$. 当 $x>1$ 时,$f'(x)=\ln x+1>0$,则 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增,所以 $e^a<\frac{b}{e}$,即 $b>e^{a+1}$,选 B.

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

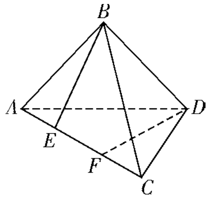
9. AC 【解析】由图知,$f(x)$ 的最小正周期为 $T=4\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$,结论 A 正确;因为 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,$A=2$,则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. 因为 $x=\frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小零点,则 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi$,得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=$

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，从而 $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 不是偶函数，结论 B 错误；因为 $f(0)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=1$，则 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 内的最小值为 1，结论 C 正确；因为 $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin(-\pi)=0$，则 $x=-\frac{2\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的零点，结论 D 错误，选 AC.

10. ABD　**【解析】**去掉 9 个原始评分中的一个最高分和一个最低分，不会改变该组数据的中位数，A 正确；因为学生网络评分在区间[8,9)内的频率为 0.3，学生总人数为 4000，则网络评分在区间[8,9)内的学生估计有 $4000\times0.3=1200$ 人，B 正确；若去掉的一个最高分为 9.6，去掉的一个最低分为 8.9，则 9 名教师原始评分的极差等于 0.7，C 错误；学生网络评分在区间[9,10]内的频率为 0.5，则 $X\sim B(10,0.5)$，所以 $E(X)=10\times0.5=5$，D 正确；选 ABD.

11. BC　**【解析】**当 $a=3,b=2$ 时，双曲线的渐近线的斜率 $k=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{2}{3}$，A 错误；因为点 $P(2,4\sqrt{2})$ 在 C 上，则 $\frac{4}{a^2}-\frac{32}{b^2}=1$，得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2}{4}+8>8$，所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>3$，B 正确；因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，若 $PF_1\perp PF_2$，则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$，即 $(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4c^2$，即 $4a^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4c^2$，得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2(c^2-a^2)=2b^2$，所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=b^2$，C 正确；若 C 为等轴双曲线，则 $a=b$，从而 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{2}a$. 若 $|PF_1|=2|PF_2|$，则 $|PF_2|=2a$，$|PF_1|=4a$. 在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{16a^2+4a^2-8a^2}{2\times4a\times2a}=\frac{3}{4}$，D 错误，选 BC.

12. ACD　**【解析】**如图，因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 都是以 AC 为斜边的直角三角形，则 AC 为四面体 $ABCD$ 外接球的直径. 因为 $AB=2,BC=2\sqrt{3}$，则 $2R=AC=4$，所以四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=16\pi$，A 正确；分别作 $BE\perp AC,DF\perp AC$，垂足为 E,F，则 $\theta=\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FD}\rangle$. 由已知可得，$EB=FD=\sqrt{3}$，$AE=CF=1$，$EF=2$. 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}$，则 $|\overrightarrow{BD}|^2=\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD})^2=\overrightarrow{BE}^2+\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{FD}^2+2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{FD}$



$=3+4+3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos(\pi-\theta)=8$，所以 $|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{2}$，B 错误；因为 $CD^2+BD^2=12=BC^2$，则 $CD\perp BD$. 同理，$AB\perp BD$. 又 $CD\perp AD$，则 $CD\perp$ 平面 ABD，所以 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\times CD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，C 正确；由已知可得，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle CAB=60^\circ$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4\times2\sqrt{3}\cos30^\circ-4\times2\cos60^\circ=8$，则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{8}{4\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle=45^\circ$，所以异面直线 AC 与 BD 所成的角为 45°，D 正确，选 ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

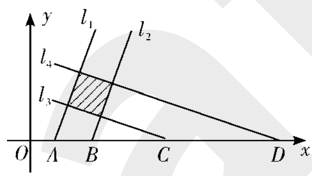
13. -2　**【解析】**因为 $f'(x)=e^{x-1}+3x^2$，则 $f'(1)=4$. 又 $f(1)=2$，则切线方程为 $y-2=4(x-1)$，即 $y=4x-2$，所以该切线在 y 轴上的截距为 -2.

14. 729　**【解析】**因为 $T_3=C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2=4C_n^2x^{\frac{n-6}{2}}$，由已知 $\frac{n-6}{2}=0$，则 $n=6$. 因为 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数的绝对值之和与 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数之和相等，取 $x=1$，得 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中各项系数之和为 $3^6=729$.

15. $m-1$ 【解析】由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，得 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，即 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$. 所以 $S_{2021}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2021}=(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{2023}-a_{2022})=a_{2023}-a_2=m-1$.

16. $\frac{16}{17}$或$\frac{36}{5}$或$\frac{196}{53}$(三个结果只要求填写两个，不考虑数据排序，填对 1 个得 3 分，填对 2 个得 5 分)

【解析】不妨设正方形的四条边所在的直线分别为 l_1、l_2、l_3、l_4，它们分别经过点 A、B、C、D，直线 l_1 的倾斜角为 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，正方形的边长为 a.



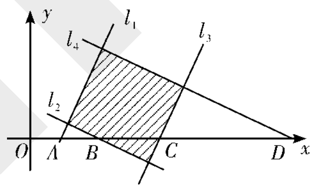
①若 $l_1 /\!/ l_2$，则 $l_3 /\!/ l_4$，且 $l_3\perp l_1$，从而 l_3 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AB|=1$，则 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\sin\theta$，所以 $a=\sin\theta$.

因为 $|CD|=4$，则 l_3 与 l_4 之间的距离为 $4\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=4\cos\theta$，

所以 $a=4\cos\theta$.

令 $\sin\theta=4\cos\theta$，则 $\sin^2\theta=16\cos^2\theta=16(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{16}{17}$，则正方形面积 $S=\sin^2\theta=\frac{16}{17}$.



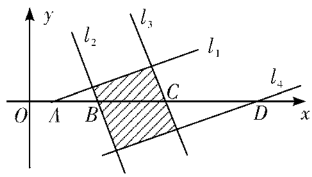
②若 $l_1 /\!/ l_3$，则 $l_2 /\!/ l_4$，且 $l_2\perp l_1$，从而 l_2 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AC|=3$，则 l_1 与 l_3 之间的距离为 $3\sin\theta$，所以 $a=3\sin\theta$.

因为 $|BD|=6$，则 l_2 与 l_4 之间的距离为 $6\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=6\cos\theta$，

所以 $a=6\cos\theta$. 令 $3\sin\theta=6\cos\theta$，则 $\sin^2\theta=4\cos^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{4}{5}$，

则正方形面积 $S=9\sin^2\theta=\frac{36}{5}$.



③若 $l_1 /\!/ l_4$，则 $l_2 /\!/ l_3$，且 $l_2\perp l_1$，从而 l_2 的倾斜角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

因为 $|AD|=7$，则 l_1 与 l_4 之间的距离为 $7\sin\theta$，所以 $a=7\sin\theta$.

因为 $|BC|=2$，则 l_2 与 l_3 之间的距离为 $2\sin\left[\pi-\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\cos\theta$，

所以 $a=2\cos\theta$.

令 $7\sin\theta=2\cos\theta$，则 $49\sin^2\theta=4\cos^2\theta=4(1-\sin^2\theta)$，得 $\sin^2\theta=\frac{4}{53}$，则正方形面积 $S=49\sin^2\theta=\frac{196}{53}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 由已知，$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. ……… (2 分)

则 $g(x)=f(-x)=\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以当 $g(x)$ 单调递减时，函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增. …………………………………………………… (3 分)

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. ………………………………………… (5 分)

(2)因为 $f(A)=\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，则 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………（6 分）

又 $a=\sqrt{3}$，由余弦定理，得 $3=b^2+c^2-bc$，即 $b^2+c^2=bc+3$. …………………………………………（7 分）

因为 D 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+bc)=\frac{1}{4}(2bc+3)$. ……………………（8 分）

因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，则 $bc+3\geqslant 2bc$，即 $0<bc\leqslant 3$，所以 $\frac{3}{4}<|\overrightarrow{AD}|^2\leqslant\frac{9}{4}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}<|\overrightarrow{AD}|\leqslant\frac{3}{2}$.

所以线段 AD 的长的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right]$. …………………………………………（10 分）

18.【解析】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_1=3$，则 $S_3=3a_1+3d=9+3d$. ……………………（2 分）

因为 $S_3=5a_1=15$，则 $9+3d=15$，得 $d=2$. …………………………………………（3 分）

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$. …………………………………………（4 分）

(2)因为 $S_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$，则 $b_n=1+\frac{2}{S_n}=1+\frac{2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$. ……………………（6 分）

所以 $T_n=n+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=n+1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. …………………………………………（8 分）

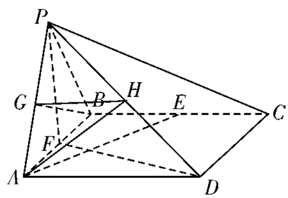
当 $n\leqslant 2$ 时，因为 $-\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<0$，则 $[T_n]=n$. …………………………………………（9 分）

当 $n\geqslant 3$ 时，因为 $0<\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}$，则 $[T_n]=n+1$. …………………………………………（10 分）

因为 $[T_1]+[T_2]+\cdots+[T_n]=63$，则 $1+2+4+5+\cdots+(n+1)=63$，即 $3+\frac{(n-2)(4+n+1)}{2}=63$，

即 $n^2+3n-130=0$，即 $(n-10)(n+13)=0$. 因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=10$. ……………………（12 分）

19.【解析】(1)解法一：取 AB 的中点 F，连接 PF，DF.



因为 $PB=AB$，$\angle PBA=60^\circ$，则 $\triangle PAB$ 为正三角形，所以 $PF\perp AB$.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，则 $PF\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AE\subset$ 平面 $ABCD$，则 $PF\perp AE$. ① …………………………（2 分）

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，E 为 BC 的中点，则

$\text{Rt}\triangle DAF\cong\text{Rt}\triangle ABE$，所以 $\angle ADF=\angle BAE$，

从而 $\angle ADF+\angle EAD=\angle BAE+\angle EAD=\angle BAD=90^\circ$，

所以 $DF\perp AE$. ② …………………………………………（4 分）

结合①②知，$AE\perp$ 平面 PDF，所以 $AE\perp PD$. …………………………………………（5 分）

解法二：因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp AB$，则

$AD\perp$ 平面 PAB，所以 $AD\perp AP$，从而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. ……………………（2 分）

因为 $PB=AB$，$\angle PBA=60^\circ$，则 $\triangle PAB$ 为正三角形.

设 $AB=2$，则 $AD=AP=2$. …………………………………………（3 分）

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2-4\cos 60^\circ=0$，

则 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{PD}$，所以 $AE\perp PD$. …………………………………………（5 分）

(2)解法一：分别取 PA，PD 的中点 G，H，则 $GH \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AD$.

又 $BE \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}AD$，则 $GH \underline{\mathbin{/\!/}} BE$，所以四边形 $BGHE$ 为平行四边形，从而 $EH \parallel BG$. ………………………………（6 分）

因为 $PB=AB$，则 $BG \perp PA$. 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，$AD \perp AB$，则 $AD \perp$ 平面 PAB，

从而 $AD \perp BG$，所以 $BG \perp$ 平面 PAD，从而 $EH \perp$ 平面 PAD.

连接 AH，则 $\angle EAH$ 为直线 AE 与平面 PAD 所成的角. ………………………………（8 分）

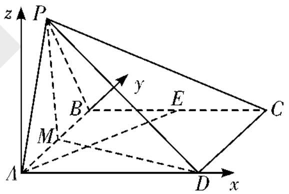
设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$PA=x(0<x<2)$，则 $BE=GH=\frac{1}{2}$，$AG=\frac{x}{2}$.

从而 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$AH=\sqrt{AG^2+GH^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. ………………………………（10 分）

在 $\mathrm{Rt}\triangle AHE$ 中，$\cos\angle EAH=\frac{AH}{AE}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5}}$.

因为当 $0<x<2$ 时，$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{5}}$ 单调递增，则 $\cos\angle EAH \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$，

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$. ………………………………（12 分）



解法二：以直线 AD 为 x 轴，AB 为 y 轴，过点 A 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系. ………………………………（6 分）

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，则 $\overrightarrow{AD}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$. ……（7 分）

在平面 PAB 内过点 P 作 AB 的垂线，垂足为 M.

因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$，则 $PM \perp$ 平面 $ABCD$.

设 $AM=a(0<a<2)$，则 $BM=|1-a|$.

因为 $PB=1$，则 $PM=\sqrt{PB^2-BM^2}=\sqrt{1-(1-a)^2}=\sqrt{2a-a^2}$，所以 $\overrightarrow{AP}=(0,a,\sqrt{2a-a^2})$. ……（8 分）

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PAD 的一个法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ ay+\sqrt{2a-a^2}\,z=0.\end{cases}$

取 $z=-a$，则 $y=\sqrt{2a-a^2}$，所以 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{2a-a^2},-a)$. ………………………………（9 分）

于是 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{2a-a^2}$，$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{2a}$.

又 $|\overrightarrow{AE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{a}{2}}$. ………………………………（10 分）

设直线 AE 与平面 PAD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{a}{2}}$.

从而 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\frac{2a+1}{5}}$. ………………………………（11 分）

因为函数 $f(a)=\sqrt{\frac{2a+1}{5}}$ 单调递增，则当 $0<a<2$ 时，则 $\cos\theta \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$，

所以直线 AE 与平面 PAD 所成角的余弦值的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},1\right)$. ………………………………（12 分）

20.【解析】(1)由已知，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则 $a=2c$. ……………………………………………………………… (1 分)

设点 F_1，F_2 关于直线 l 的对称点分别为 M，N，因为点 O，C 关于直线 l 对称，O 为线段 F_1F_2 的中点，

则 C 为线段 MN 的中点，从而线段 MN 为圆 C 的一条直径，所以 $|F_1F_2|=|MN|=2$，即 $2c=2$，即 $c=1$.

…… (3 分)

于是 $a=2$，$b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………… (4 分)

(2)因为原点 O 为线段 F_1F_2 的中点，圆心 C 为线段 MN 的中点，直线 l 为线段 OC 的垂直平分线，

所以点 O 与 C 也关于直线 l 对称，

因为点 $C(2m,4m)$，则线段 OC 的中点为 $(m,2m)$，直线 OC 的斜率为 2，又直线 l 为线段 OC 的垂直平分线，

所以直线 l 的方程为 $y-2m=-\frac{1}{2}(x-m)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5m}{2}$. ……………………………………… (6 分)

将 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5m}{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $3x^2+4\left(-\frac{x}{2}+\frac{5m}{2}\right)^2=12$，即 $4x^2-10mx+25m^2-12=0$.

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{5m}{2}$，$x_1x_2=\frac{25m^2-12}{4}$. ……………………………………… (7 分)

所以 $k_{AC}+k_{BC}=\frac{y_1-4m}{x_1-2m}+\frac{y_2-4m}{x_2-2m}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+3m}{x_1-2m}+\frac{x_2+3m}{x_2-2m}\right)$

$=-\frac{(x_1+3m)(x_2-2m)+(x_2+3m)(x_1-2m)}{2(x_1-2m)(x_2-2m)}$

$=-\frac{2x_1x_2+m(x_1+x_2)-12m^2}{2x_1x_2-4m(x_1+x_2)+8m^2}$. …………………………………………………………… (8 分)

由已知，$k_{AC}+k_{BC}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{2x_1x_2+m(x_1+x_2)-12m^2}{2x_1x_2-4m(x_1+x_2)+8m^2}+\frac{2}{3}=0$，得 $2x_1x_2-m(x_1+x_2)-4m^2=0$.

所以 $\frac{25m^2-12}{2}-\frac{5m^2}{2}-4m^2=0$，即 $m^2=1$，即 $m=\pm1$. ……………………………………………… (10 分)

因为直线 l 与椭圆 E 相交，则 $\Delta=100m^2-16(25m^2-12)>0$，解得 $m^2<\frac{16}{25}$，即 $|m|<\frac{4}{5}$.

因为 $\frac{4}{5}<1$，所以不存在实数 m，使直线 AC 与 BC 的斜率之和为 $\frac{2}{3}$. ………………………………… (12 分)

21.【解析】(1)设甲同学正确配对 3 对为事件 A，正确配对 5 对为事件 B，甲同学能晋级为事件 C，

则 $C=A+B$，且 A，B 互斥. ……………………………………………………………………………… (1 分)

因为甲同学只有一组能正确配对，其余四组都随机配对，则 $P(A)=\frac{C_4^2}{A_4^4}=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{A_4^4}=\frac{1}{24}$. …… (3 分)

从而 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$，所以甲同学能晋级的概率为 $\frac{7}{24}$. ………………………… (4 分)

(2)设选择方式一、二的班级团队挑战成功的概率分别为 P_1，P_2.

当选择方式一时，因为两人都回答错误的概率为 $(1-p)^2$，则两人中至少有一人回答正确的概率为

$1-(1-p)^2$，所以 $P_1=[1-(1-p)^2]^n=p^n(2-p)^n$. …………………………………………………… (6 分)

当选择方式二时，因为一个小组闯关成功的概率为 p^n，则一个小组闯关不成功的概率为 $1-p^n$，

所以 $P_2=1-(1-p^n)^2=p^n(2-p^n)$. …………………………………………………………………… (7 分)

所以 $P_1-P_2=p^n(2-p)^n-p^n(2-p^n)=p^n[(2-p)^n+p^n-2]$. ………………………………………… (8 分)

设 $f(n)=(2-p)^n+p^n-2$，则 $f(n+1)-f(n)=(2-p)^{n+1}+p^{n+1}-(2-p)^n-p^n$

$=(2-p)^n(1-p)+p^n(p-1)=(1-p)[(2-p)^n-p^n]$. ……………………………………………（10 分）

因为 $0<p<1$，则 $1-p>0$，$2-p>1$，从而 $(2-p)^n>1$，$p^n<1$，所以 $f(n+1)-f(n)>0$，

即 $f(n+1)>f(n)$，所以 $f(n)$ 单调递增. ……………………………………………………（11 分）

因为 $f(2)=(2-p)^2+p^2-2=2p^2-4p+2=2(p-1)^2>0$，则当 $n\geqslant 15$ 时，$f(n)>0$，从而 $P_1-P_2>0$，

即 $P_1>P_2$. 所以为使本班挑战成功的可能性更大，应选择方式一参赛. ……………………（12 分）

22.【解析】(1) $f'(x)=\dfrac{a}{x}-\cos x+1(x>0)$. ……………………………………………………（1 分）

若 $a>0$，因为 $x>0$，$1-\cos x\geqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合要求. ………（2 分）

若 $a<0$，则当 $x\in\left(0,-\dfrac{a}{2}\right)$ 时，$\dfrac{a}{x}<-2$，从而 $f'(x)<-2-\cos x+1=-(1+\cos x)\leqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递减，不合要求.

综上分析，a 的取值范围是 $(0,+\infty)$. …………………………………………………………（4 分）

(2) 令 $f'(x)=0$，则 $\dfrac{a}{x}-\cos x+1=0$，即 $a=x\cos x-x$.

设 $g(x)=x\cos x-x$，则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-1$. ……………………………………………（5 分）

①当 $x\in(0,\pi)$ 时，$\cos x<1$，$\sin x>0$，则 $\cos x-1<0$，$-x\sin x<0$，从而 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减.

……………………………………………………………………………………………………（6 分）

②当 $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g''(x)=-\sin x-(\sin x+x\cos x)=-(2\sin x+x\cos x)$.

因为 $\sin x<0$，$\cos x<0$，则 $g''(x)>0$，从而 $g'(x)$ 单调递增. 因为 $g'(\pi)=-2<0$，$g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{2}-1>0$，

则 $g'(x)$ 在 $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点，记为 x_0，且当 $x\in(\pi,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增. ………………………………………（8 分）

③当 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$g'''(x)=-(2\cos x+\cos x-x\sin x)=x\sin x-3\cos x$.

因为 $\sin x<0$，$\cos x>0$，则 $g'''(x)<0$，从而 $g''(x)$ 单调递减.

因为 $g''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=2>0$，$g''(2\pi)=-2\pi<0$，则 $g''(x)$ 在 $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 内有唯一零点，记为 x_1，且当 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},x_1\right)$ 时，

$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_1,2\pi)$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减.

因为 $g'\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{2}-1>0$，$g'(2\pi)=0$，则当 $x\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增. ……（10 分）

综上分析，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,2\pi)$ 上单调递增.

因为 $g(0)=g(2\pi)=0$，则当 $g(x_0)<a<0$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象在 $(0,2\pi)$ 上有两个交点，

从而 $f'(x)$ 有两个变号零点，即 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点.

因为 $g'(x_0)=0$，则 $\cos x_0-x_0\sin x_0-1=0$，即 $\cos x_0=1+x_0\sin x_0$.

从而 $g(x_0)=x_0\cos x_0-x_0=x_0(1+x_0\sin x_0)-x_0=x_0^2\sin x_0$. 取 $\theta=x_0$，则 $\cos\theta=1+\theta\sin\theta$，

且当 $\theta^2\sin\theta<a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点. ……………………………（12 分）